

MODELAGEM MATEMÁTICA DA OSCILAÇÃO AMORTECIDA DE PÊNULOS ACOPLADOS UTILIZANDO VIDEOANÁLISE: UMA PRÁTICA PEDAGÓGICA

MATHEMATICAL MODELING OF DAMPED OSCILLATION OF COUPLED PENDULUMS USING VIDEO ANALYSIS: A PEDAGOGICAL PRACTICE

Airam Teresa Zago Romcy Sausen

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, RS, Brasil
Doutora em Engenharia Elétrica. E-mail: airam@unijui.edu.br
<https://orcid.org/0000-0001-6499-4145>

Eduardo Henrique Kretschmer

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, RS, Brasil
Graduando em Engenharia Civil. E-mail: eduardo.kretschmer@sou.unijui.edu.br
<https://orcid.org/0009-0004-6868-6325>

Bolivar Oliveira dos Santos Júnior

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, RS, Brasil
Graduando em Engenharia Civil. E-mail: bolivar.junior@sou.unijui.edu.br
<https://orcid.org/0009-0006-9577-3365>

Marcos Ricardo Backes

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, RS, Brasil
Graduando em Engenharia Civil. E-mail: marcos.backes@sou.unijui.edu.br
<https://orcid.org/0009-0003-6098-5390>

Submissão: 27-12-2023

Aceite: 26-08-2024

RESUMO: A modelagem matemática é um conjunto de procedimentos utilizados para solucionar problemas do mundo real, destacando-se tanto como método científico de pesquisa, quanto estratégia de ensino e aprendizagem. O estudo do pêndulo possui uma significativa importância histórica, evidenciando o papel crucial do pêndulo simples como modelo matemático para a compreensão de diversos fenômenos oscilatórios. Já os pêndulos acoplados apresentam complexidade e desafios intrínsecos, contribuindo para diversas áreas científicas, desde a física até as ciências aeroespaciais. Este artigo explora a aplicação da modelagem matemática no ensino de Engenharias, focando na prática pedagógica



da modelagem matemática de um sistema de pêndulos acoplados com amortecimento. Um experimento é montado utilizando materiais simples, em seguida o movimento dos pêndulos é registrado e analisado no *software* Tracker. Duas abordagens de modelagem, fenomenológica e empírica, são empregadas, utilizando Equações Diferenciais Ordinárias e ajuste de curvas no Matlab®. A prática pedagógica revela-se eficaz, validando os modelos desenvolvidos com sucesso e demonstrando uma boa acurácia, evidenciada pelos coeficientes de determinação aproximando-se de 1. Este estudo ressalta o papel da modelagem matemática na compreensão do comportamento dinâmico de sistemas complexos, com ênfase nos pêndulos acoplados com amortecimento, e também destaca a eficácia da prática pedagógica no contexto educacional.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática. Ensino. Oscilações. Pêndulos Acoplados.

ABSTRACT: Mathematical modeling is a set of procedures used to solve real-world problems, standing out as both a scientific research method and a teaching and learning strategy. The study of the pendulum holds significant historical importance, highlighting the pivotal role of the simple pendulum as a mathematical model for understanding various oscillatory phenomena. Coupled pendulums, on the other hand, present complexity and intrinsic challenges, contributing to various scientific areas from physics to aerospace sciences. This article explores the application of mathematical modeling in Engineering education, focusing on the pedagogical practice of modeling a system of coupled pendulums with damping. An experiment is set up using simple materials, followed by recording and analysis of the pendulum motion in the Tracker software. Two modeling approaches, phenomenological and empirical, are employed, utilizing Ordinary Differential Equations and curve fitting in Matlab®. The pedagogical practice proves effective, successfully validating the developed models and demonstrating good accuracy, as evidenced by determination coefficients approaching 1. This study emphasizes the role of mathematical modeling in understanding the dynamic behavior of complex systems, with a focus on coupled pendulums with damping, and also highlights the effectiveness of pedagogical practices in the educational context.

KEYWORDS: Mathematical Modeling. Teaching. Oscillations. Coupled Pendulums.

Introdução

A modelagem matemática envolve a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando as suas soluções na linguagem do mundo real. Essa abordagem pode ser utilizada como método científico de pesquisa, ou como estratégia de ensino e aprendizagem. As vantagens da aplicação da modelagem em pesquisas científicas são evidentes nos avanços alcançados em diversas áreas das ciências, tais como, na física, na química, na biologia, e nas engenharias. Quando aplicada no âmbito educacional, a aprendizagem através da modelagem pode facilitar o entendimento da matemática, pois é vasto o seu potencial de utilizar aplicações (BASSANEZI, 2010).

Enquanto abordagem de ensino e aprendizado em sala de aula, a modelagem matemática não pressupõe a necessidade de conhecimentos prévios por parte do estudante em relação aos conteúdos a serem abordados. Isso se deve ao fato de que, por meio dessa metodologia, é viável

construir o próprio conhecimento durante o processo formativo, que se inicia com a escolha do tema ou a identificação de um fenômeno a ser modelado. Esse percurso abrange desde a identificação das variáveis até a formulação das hipóteses a serem investigadas. O resultado desse conjunto de ações é o modelo matemático do fenômeno, o qual pode ser aprimorado ao longo do tempo.

Considerando o ensino de matemática, uma das estratégias pedagógicas adotadas tem sido a utilização da modelagem matemática (LOPES, 2023; LOPES e PACHECO, 2023; OLIVERIA, JANUÁRIO e ARAÚJO FILHO, 2024). Nessa situação, o foco primordial não reside na obtenção instantânea de um modelo matemático preciso, mas sim em percorrer as etapas que permitem a sistematização e aplicação do conteúdo matemático. Mais importante do que os modelos obtidos é o caminho, a análise crítica e sua inserção no contexto sociocultural. O fenômeno modelado (i.e., o problema não matemático) deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado de técnicas e conteúdos da própria matemática. As discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo na sociedade em que vive (SOARES e SANTOS, 2016; ALMEIDA e SILVA, 2021; ALMEIDA, 2022).

O estudo do pêndulo remonta a Galileu Galilei, que observou a regularidade das oscilações pendulares no início do século XVII. Desenvolvimentos subsequentes levaram à compreensão das leis que governam esse movimento, com destaque para a contribuição de Christiaan Huygens (BURROWES e FARINA; 2005). Desde então, os pêndulos têm sido fundamentais na física e na matemática, sendo aplicados em uma variedade de campos e situações, tais como, na medição do tempo, na física teórica e experimental, nas artes para criar efeitos visuais, na engenharia de pontes e edifícios, na radiestesia, entre outras (NUSSENZVEIG, 2002; JEWETT e SERWAY, 2011; HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016; YOUNG e FREEDMAN, 2016; DUTRA e SOUZA, 2019; MOREIRA ET AL., 2019).

O pêndulo simples é um sistema físico usado para exemplificar os princípios básicos da oscilação e do movimento harmônico simples. Consiste em uma massa presa a uma haste, que oscila em torno de um ponto de equilíbrio sob a influência da gravidade. Esse sistema possui um movimento periódico caracterizado por amplitude, período e frequência, os quais são determinados pelas propriedades físicas do pêndulo. O estudo do pêndulo simples possui um papel fundamental no desenvolvimento da teoria das oscilações fornecendo compreensões valiosas em diversas áreas, desde a física até a engenharia, destacando sua importância como um modelo matemático simples, mas poderoso para entender fenômenos oscilatórios (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016; LAGE, 2018).

Já os pêndulos acoplados são interligados de alguma forma, revelando comportamentos fascinantes e intrincados, desafiando a intuição e oferecendo um campo de estudo complexo e estimulante. Devido a sua interconexão, compartilham frequências de oscilação, possuindo características únicas, como os batimentos observados nas suas trajetórias. O estudo dos pêndulos acoplados detém uma significativa relevância científica, uma vez que encontra aplicações em diversas situações físicas, tais como, em oscilações em sistemas mecânicos, vibrações a nível molecular e nas ciências aeroespaciais. Além disso, os pêndulos acoplados são utilizados no estudo de fenômenos complexos de oscilação e dinâmica não linear (SANTANA e SILVA, 2017).

Considerando o movimento do pêndulo, a modelagem matemática desempenha um papel crucial, permitindo a representação do comportamento dinâmico do sistema, através de equações que capturam as interações entre forças, massa e comprimento. Nesse artigo é realizada a modelagem matemática de um sistema de pêndulos acoplados com amortecimento, como prática pedagógica da disciplina de Modelagem Matemática I, do núcleo comum dos cursos de Engenharias da Unijuí. Inicialmente é realizado um experimento utilizando materiais simples para reproduzir o movimento dos pêndulos acoplados, em seguida o mesmo é gravado e analisado no *software Tracker*. Na sequência, é realizada a modelagem matemática do movimento dos pêndulos acoplados através de duas abordagens: a modelagem fenomenológica e a modelagem empírica. A modelagem fenomenológica é efetuada por meio de um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e o amortecimento é representado pela EDO de um sistema massa-mola. A modelagem empírica ocorre através de um ajuste de curvas realizado na ferramenta computacional Matlab® por meio do *toolbox cftool*. Por fim, a prática pedagógica de modelagem matemática de um sistema de pêndulos acoplados com amortecimento, realizada como parte integrante da disciplina de Modelagem Matemática I, revelou-se particularmente eficaz. Os modelos desenvolvidos são validados com êxito, demonstrando uma boa acurácia, evidenciada pelos coeficientes de determinação próximos de 1.

Coleta dos dados experimentais

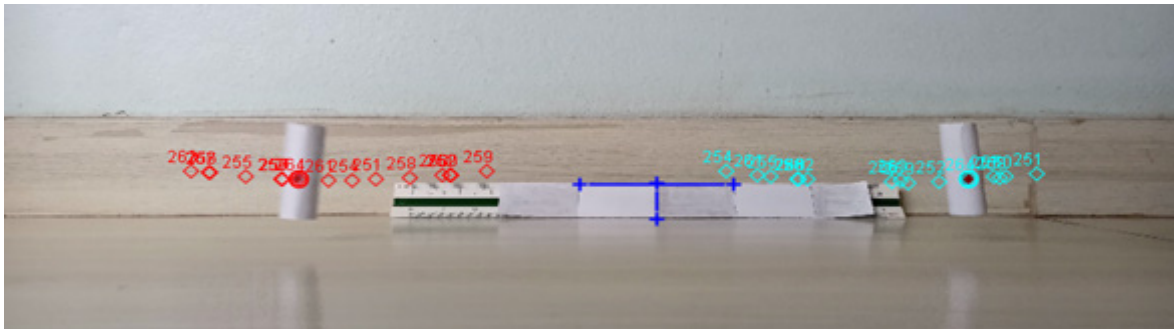
Nessa seção é apresentada a coleta dos dados experimentais do movimento de pêndulos acoplados para investigar de maneira sistemática e adequada os objetivos propostos neste estudo. Inicialmente é realizado um experimento objetivando descrever o movimento de pêndulos acoplados, para isso são empregados materiais simples, como papel, linha, pesos, canetas e fita adesiva. Com esses materiais são construídos dois pêndulos de papel com pesinhos dentro para garantir uma maior inércia, sendo cada pêndulo sustentado por uma linha firmemente presa a um suporte fixo pela fita adesiva. Após, é realizado o acoplamento dos pêndulos por meio de uma barra rígida construída de papel, sendo também introduzida, próximo aos pêndulos, uma barra de escala. Para finalizar, no corpo dos pêndulos são desenhados dois pontos com uma caneta para servir de referência durante a vídeo análise. Na Figura 1 é apresentada uma visão frontal do experimento.

Figura 1: Montagem do experimento.



Com o experimento montado, é iniciada a oscilação de um dos pêndulos, ao mesmo tempo que é realizada a gravação de toda a movimentação (QR Code do experimento em Anexo). Na sequência, o vídeo é inserido no *software Tracker*, sendo extraído os dados posicionais dos pêndulos em função do tempo, conforme Figura 2. Para realizar a coleta dos dados, inicialmente é definido um ponto para representar a origem do sistema cartesiano, sendo definido o canto inferior esquerdo, garantindo assim que todas as coordenadas e eventos observados estejam no 1º quadrante cartesiano. Juntamente com as configurações iniciais, é definido os tamanhos reais utilizando a escala construída anteriormente.

Figura 2: Coleta de dados no *software Tracker*.

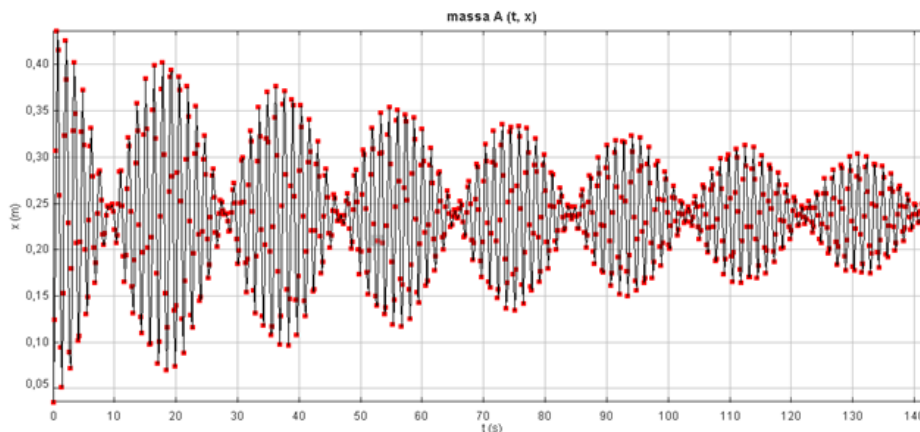


Fonte: Autores (2023).

Para a coleta de dados, os dois pêndulos são assim denominados: massa A (vermelha) e massa B (ciano). O movimento de oscilação é iniciado a partir da massa A, no momento de tempo 0, sendo que nesse instante a mesma apresenta a máxima amplitude do movimento. O intervalo de tempo observado é de até , com uma taxa de coleta de dados de 5 posições por segundo. Os dados extraídos do *software Tracker* são as posições e das massas A e B, todas em função do tempo.

Durante a coleta de dados no *software Tracker* é possível observar um padrão nos dados com o passar do tempo. A formação de batimentos é notada, caracterizados pela breve interrupção na oscilação dos pêndulos antes de retomarem ao movimento novamente. Sendo também perceptível, um decréscimo da amplitude máxima de cada batimento com o passar do tempo, indicando a ocorrência de um amortecimento do movimento. Na Figura 3 são apresentados os dados coletados do experimento.

Figura 3: Dados coletados do experimento.

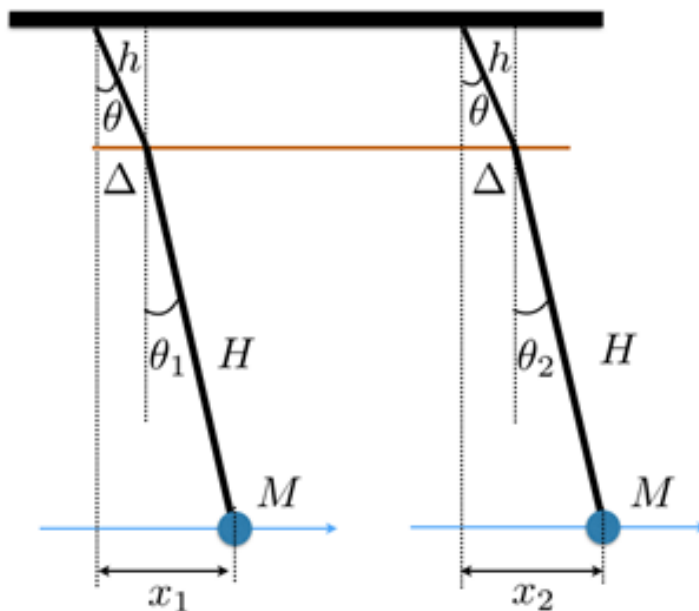


Fonte: Autores (2023).

Modelagem Matemática

Nesta seção, a abordagem inicial consiste na apresentação da modelagem fenomenológica do sistema de pêndulos acoplados com amortecimento por meio de EDOs, explorando os aspectos conceituais do fenômeno. A representação matemática do sistema físico, exemplificado no experimento de pêndulos acoplados com amortecimento, pode ser visualizada na Figura 4, seguida pela exposição do seu desenvolvimento algébrico. Em seguida, é apresentada a modelagem do amortecimento em um sistema massa-mola. Por fim, com o objetivo de alcançar um modelo matemático abrangente que representa o movimento de pêndulos acoplados com amortecimento procede-se à integração de alguns termos derivados dessas duas modelagens. Posteriormente, é desenvolvida a modelagem empírica na ferramenta computacional Matlab® por meio do *toolbox cftool*, via ajuste de curvas, através de uma soma de senos de 8 termos.

Figura 4: Sistema de pêndulos acoplados.



Fonte: Coluci e Fonseca (2021).

Para a modelagem fenomenológica do movimento de pêndulos acoplados, parte-se dos modelos físicos que descrevem tal comportamento. Ao considerar o movimento de um único pêndulo com pequenas oscilações, conhecido como modelo do pêndulo simples (PRIEST e POTH, 1982), a dinâmica é governada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{H}x \quad (1)$$

onde: $x(t)$ é o movimento do pêndulo, g é a aceleração da gravidade, H é o comprimento do pêndulo. Aplicando a equação (1) aos dois pêndulos, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{g}{H}(x_1 - \Delta(x_1, x_2)) \quad (2)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{g}{H}(x_2 - \Delta(x_1, x_2)) \quad (3)$$

onde: $\Delta(x_1, x_2)$ depende das posições de ambos os pêndulos e representa de maneira matemática o acoplamento entre os pêndulos. Para obter as equações que descrevem o movimento de cada pêndulo, ou seja, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, deve-se desacoplar as equações acima, pois a solução da primeira é utilizada para encontrar a solução da segunda, e vice-versa. O primeiro passo é realizar a subtração das equações (2) e (3), resultando em:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{g}{H}(x_1 - x_2) \quad (4)$$

definindo $x_A = x_1 - x_2$, e $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{H}}$ que é a frequência angular de um pêndulo simples (JEWETT; SERWAY, 2011), logo tem-se:

$$\frac{d^2x_A}{dt^2} = -\omega_1^2 x_A \quad (5)$$

O segundo passo é realizar a soma das equações (2) e (3), resultando em:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{g}{H}(x_1 + x_2 - 2\Delta), \quad (6)$$

considerando que o movimento pendular ocorre a partir de pequenas amplitudes, pode-se considerar que $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$, e a partir das relações trigonométricas do triângulo retângulo obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{H} \approx \frac{x_2}{H} \approx \frac{\Delta}{h} \\ \frac{x_{1,2} - \Delta}{H} \approx \frac{x_{1,2}}{H+h} \end{aligned} \quad (7)$$

definindo $x_B = x_1 + x_2$, e $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{H+h}}$, onde $\omega_1 > \omega_2$, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{d^2x_B}{dt^2} = -\omega_2^2 x_B \quad (8)$$

Sendo que as equações (5) e (8), já desacopladas, apresentam as seguintes soluções:

$$x_A = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (9)$$

$$x_B = C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (10)$$

onde: C_1, C_2, ϕ_1 e ϕ_2 são constantes de integração e dependem das condições iniciais, como posição e velocidade dos pêndulos no instante $t = 0$. Especificamente, as constantes C_1 e C_2 modulam a amplitude de oscilação do sistema, e as constantes ϕ_1 e ϕ_2 ajustam o chamado ângulo de fase deslocando a oscilação no tempo, e x_A e x_B recebem o nome de coordenadas normais do sistema (NUSSENZVEIG, 2002).

A condição inicial dos pêndulos é o repouso, onde apenas um deles é deslocado da posição de equilíbrio, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$x_1(0) = A, x_2(0) = 0, \frac{dx_1(0)}{dt} = 0, \frac{dx_2(0)}{dt} = 0. \quad (11)$$

A partir das condições iniciais as constantes são $C_1 = C_2 = A$ e $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Para este caso, a solução de equações diferenciais acopladas é dada por:

$$x_1(t) = A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right), \quad (12)$$

$$x_2(t) = A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right). \quad (13)$$

As equações (12) e (13) representam a superposição dos dois movimentos oscilatórios dos pêndulos, de mesma amplitude e frequências diferentes, onde A é a amplitude de oscilação do sistema, a qual é definida pela posição inicial do pêndulo que será posto em oscilação primeiro. O termo $\omega_1 - \omega_2$ modula o que é chamado de batimento do sistema. A forma das equações, uma envolvendo a função cosseno e a outra seno, significa que os máximos de uma coordenada correspondem aos zeros da outra coordenada (NUSSENZVEIG, 2002).

Para realizar a modelagem de um sistema real de pêndulos acoplados é necessário levar em consideração também o amortecimento do movimento ocasionado pelo atrito do fio de suporte do pêndulo e pelo atrito do ar. Nesse contexto, optou-se por incorporar as equações de amortecimento de um sistemas massa-mola unidirecionais e adaptá-las ao sistema já modelado, no qual a força de atrito é proporcional à velocidade do corpo e ao coeficiente de atrito viscoso, ou seja:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = g \tag{14}$$

onde: λ representa o coeficiente de atrito viscoso, m é a massa do corpo posto em oscilação, k é a constante elástica da mola empregada no sistema massa-mola. Esse modelo é válido para corpos imersos em fluidos, como o ar, quando se movem em baixas velocidades (JEWETT e SERWAY, 2011). Considerando $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ e $\gamma = \lambda/2m$ obtém-se a seguinte equação diferencial:

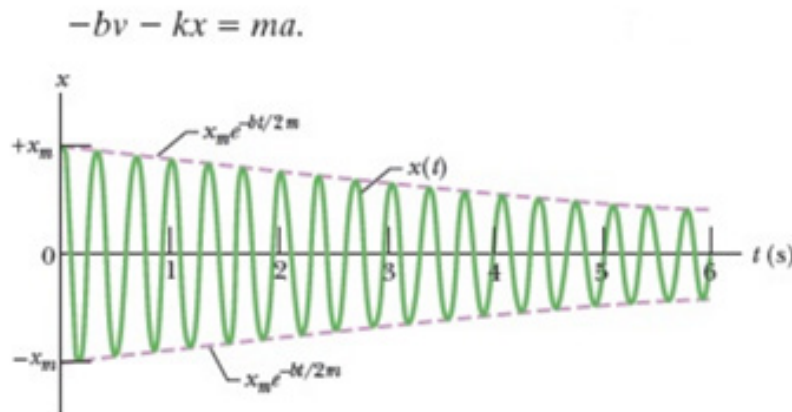
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = g \tag{15}$$

que pode apresentar três soluções distintas, sendo influenciada pelo sistema de amortecimento que ocorre, podendo ser classificada em oscilações subcríticas, críticas ou supercríticas. No caso do sistema de oscilação em análise trata-se de um subcrítico, pois este consegue desenvolver diversas oscilações antes de cessar seu movimento (HALLIDAY, RESNICK e WALKER, 2016). A solução geral desta equação diferencial para um sistema subcrítico é dada por:

$$x(t) = Be^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{15}$$

onde: B é a amplitude do movimento inicial, e ϕ é o ângulo de fase. Esta equação realiza a modelagem da posição de corpo em um sistema massa-mola unidirecional com amortecimento, sendo seu movimento apresentado na Figura 5. A parte $\cos(\omega_0 t + \phi)$ representa fisicamente o movimento oscilatório do corpo, enquanto a parte $e^{-\gamma t}$ descreve o amortecimento do movimento deste corpo com o passar do tempo (YOUNG; FREEDMAN, 2016).

Figura 5: Movimento de um sistema massa-mola amortecido.



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016).

Deste modo, o termo que descreve o amortecimento é retirado e adicionado na solução geral que rege o movimento dos pêndulos acoplados, obtendo as seguintes equações para um sistema de pêndulos acoplados com amortecimento:

$$x_1 = Ae^{-\gamma t} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) + F \quad (17)$$

$$x_2 = Ae^{-\gamma t} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) + G \quad (18)$$

onde: as constantes F e G são introduzidas em virtude de que o sistema de coordenadas é definido longe dos pêndulos, portanto, necessitando aplicar um deslocamento horizontal para realizar a análise dos dados.

Considerando a modelagem empírica do movimento de pêndulos acoplados, a mesma é realizada a partir de um ajuste de curvas que é uma técnica matemática que visa encontrar a equação ou modelo que melhor se adapta ao conjunto de dados experimentais, proporcionando uma representação precisa e eficaz do comportamento geral dos dados (FRANCO, 2006). Na modelagem empírica a construção do modelo é realizada com o auxílio do *toolbox cftool* da ferramenta computacional Matlab®. Diferentes ajustes são testados, e o modelo escolhido para descrever o movimento de pêndulos acoplados com amortecimento é uma soma de senos com 8 termos, dada por:

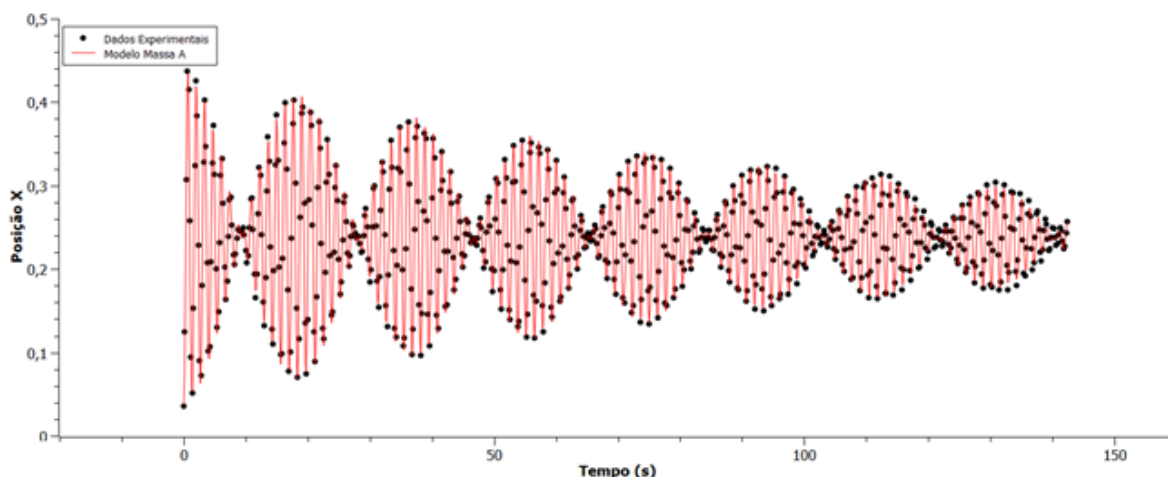
$$f(x) = \sum_{n=1}^8 \text{sen}nx. \quad (19)$$

Resultados e discussões

Nessa seção são apresentados os resultados das simulações computacionais e análises da modelagem matemática fenomenológica e empírica do movimento de pêndulos acoplados. Para isso, primeiramente é utilizado a *software* de análise de dados *SciDavis* para encontrar os parâmetros das equações (17) e (18). O intuito é utilizar os dados coletados da massa A (vermelha) e encontrar o valor dos parâmetros da equação (17) nessa ferramenta computacional. Após utilizar os dados da massa B (ciano) e os parâmetros na equação (18), objetivando validar o modelo matemático.

A função *Fit Wizard* do *SciDavis* é utilizada para inserir a equação (17), os dados do tempo e posição x da massa A também são usados, na sequência são inseridos os valores aproximados dos parâmetros obtidos pelas definições de ω_1 e ω_2 , e então os parâmetros do modelo são calculados no *software SciDavis* obtendo-se: $A = 0,2011$, $\gamma = 0,00899$, $\omega_1 = 4,7769$, $\omega_2 = 4,4409$, e $F = 0,2381$. É obtido um coeficiente de determinação de $R^2 = 0,9985$, na Figura 6 é apresentada a simulação da equação (7) que representa o movimento do pêndulo com massa A.

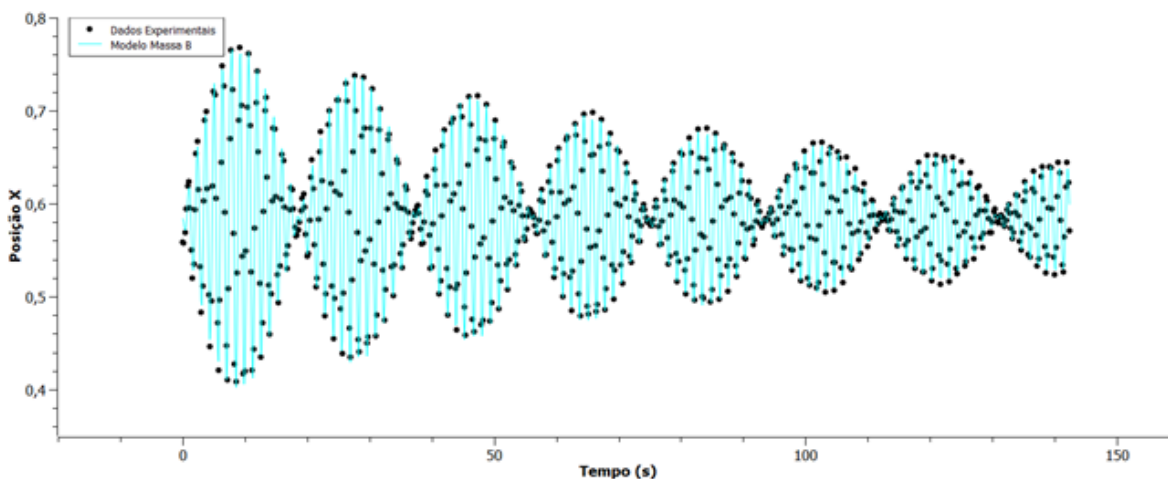
Figura 6: Ajuste da função nos dados coletados da massa A.



Fonte: Autores (2023).

Em seguida é inserida a equação (18) e os dados da massa B, os parâmetros encontrados na simulação anterior também são inseridos com a finalidade de validar o movimento de ambos os pêndulos. O único parâmetro que não é inserido é o G , visto que ele é determinado no *software* de análise de dados *SciDavis*, pois descreve o deslocamento da posição inicial do pêndulo e pertence apenas a equação (18). Na Figura 7 é apresentada a simulação do modelo que representa o movimento do pêndulo com massa B, sendo obtido um coeficiente de determinação de $R^2=0,9997$, e $G = 0,5842$.

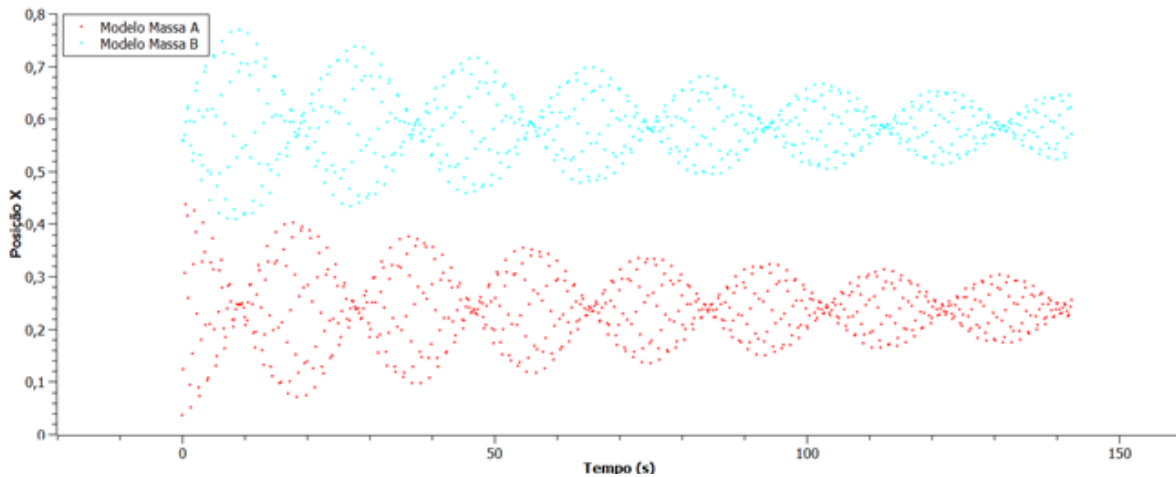
Figura 7: Ajuste da função nos dados coletados da Massa B.



Fonte: Autores (2023).

Um ponto interessante a ser apresentado e discutido é a interação dos movimentos dos pêndulos acoplados, enquanto um dos pêndulos desenvolve sua amplitude máxima durante uma oscilação, esta coincide com o momento em que o outro pêndulo cessa o seu movimento. Sendo perceptível pela análise dos dados experimentais obtidos apresentados na Figura 8.

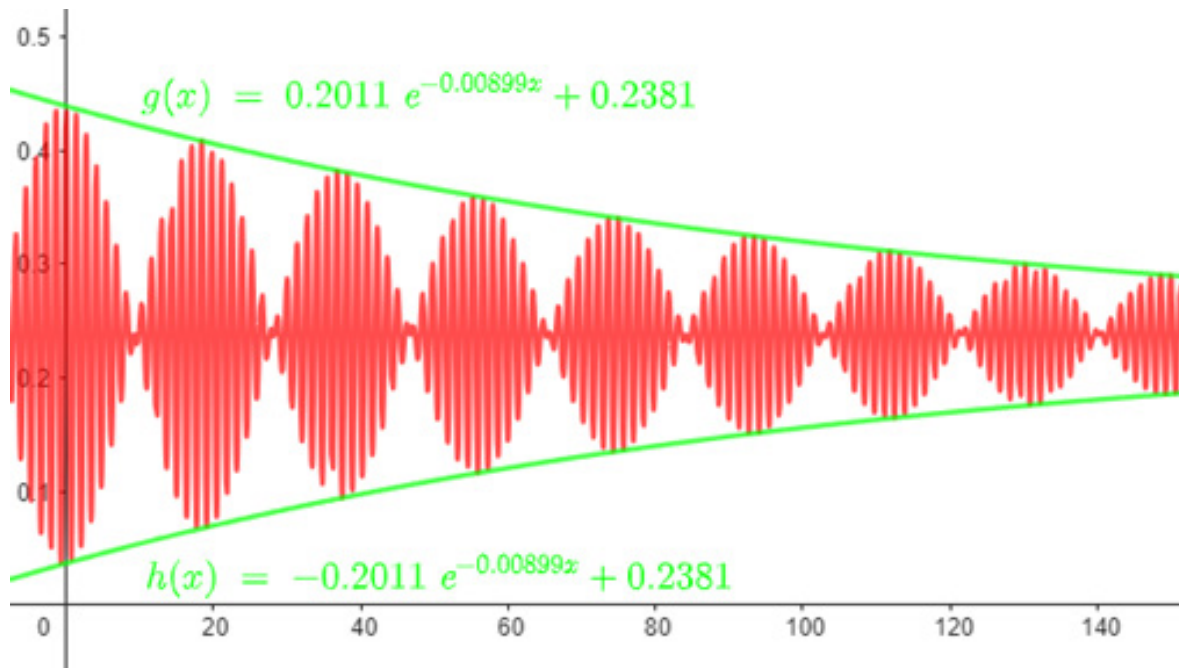
Figura 8: Posições das massas A e B.



Fonte: Autores (2023).

Para a validação do comportamento do amortecimento do sistema dos pêndulos, é inserida a equação da posição da massa A com os parâmetros específicos modelados anteriormente, juntamente com a função que descreve o amortecimento, conforme Figura 9, observa-se uma ótima correlação entre os picos máximos dos batimentos do movimento do pêndulo com o seu amortecimento.

Figura 9: Função do amortecimento do sistema da massa A



Fonte: Autores (2023)

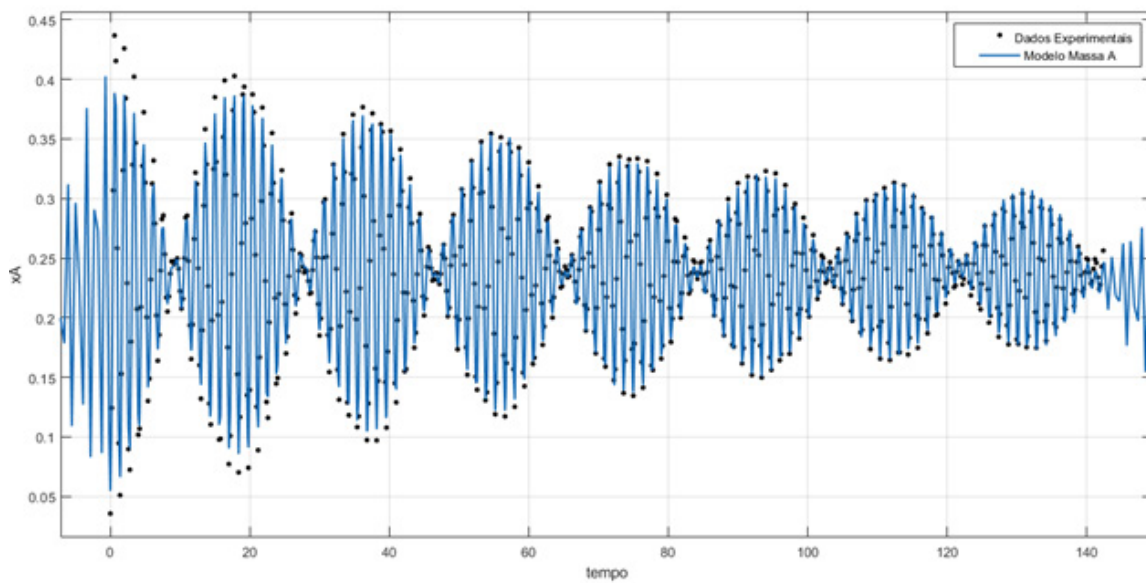
As equações finais que descrevem o comportamento da oscilação dos pêndulos acoplados na modelagem matemática proposta nesse artigo são dadas por:

$$x_A(t) = 0,2011e^{-0,0899t} \cos\left(\frac{4,7769+4,4409}{2}t\right) \cos\left(\frac{4,7769-4,4409}{2}t\right) + 0,2381 \quad (19)$$

$$x_B(t) = 0,2011e^{-0,0899t} \sin\left(\frac{4,7769+4,4409}{2}t\right) \sin\left(\frac{4,7769-4,4409}{2}t\right) + 0,5842. \quad (20)$$

Como parte final, realizou-se a modelagem empírica do sistema de pêndulos acoplados, utilizando o *software* Matlab® e o *toolbox* *cftool*, utilizando com base os mesmos dados experimentais que são empregados para realizar os ajustes dos parâmetros. Inicialmente, realiza-se uma análise das funções disponíveis e verifica-se que a função que melhor apresenta correlação com os dados experimentais é a soma de senos de 8 termos. Sendo deste modo realizado um ajuste dos dados para uma função que não apresenta origem física, servindo apenas para este conjunto de dados e dentro do intervalo dos eventos observados, obtendo um coeficiente de determinação de $R^2 = 0,987$. Na Figura 10 está é apresentada o resultado da modelagem empírica realizada no *software* Matlab.

Figura 10: Modelagem empírica dos dados da massa A.



Fonte: Autores (2023).

Na equação (21) é apresentado o modelo empírico, descrito por uma soma de senos, que descreve o movimento do sistema de pêndulos acoplados:

$$\begin{aligned}
 x_A(t) = & 0,3530\sin(0,0168t + 0,3962) + 0,1867\sin(0,0379t + 2,0860) \\
 & + 0,8296\sin(4,4366t - 0,4470) + 0,2253\sin(4,7697t - 3,4257) \quad (21) \\
 & + 0,0712\sin(0,0487t + 4,5098) + 0,2638\sin(4,7719t + 5,6934) \\
 & + 0,7992\sin(4,4358t - 3,4836) + 0,003\sin(4,8940t - 1,0021).
 \end{aligned}$$

Considerações finais

Este artigo abordou a modelagem matemática de um sistema de pêndulos acoplados com amortecimento, por meio de duas abordagens a fenomenológica e a empírica, como parte de uma prática pedagógica na disciplina de Modelagem Matemática I, nos cursos de Engenharia da Unijuí. O estudo envolveu a coleta de dados experimentais através de um experimento com pêndulos acoplados, cuja movimentação foi registrada e analisada usando o *software* Tracker. A modelagem fenomenológica foi bem-sucedida em capturar os aspectos principais do movimento pendular, como os batimentos e o amortecimento, com coeficientes de determinação R^2

muito próximos de 1, indicando boa acurácia. Além disso, a modelagem empírica realizada no Matlab® mostrou-se adequada para ajustar os dados experimentais, embora seja aplicável apenas ao conjunto específico de dados observados. Essas abordagens, ao serem aplicadas no contexto educacional, não apenas contribuíram para a compreensão dos conceitos envolvidos, mas também proporcionaram uma experiência prática valiosa em sala de aula na aplicação de técnicas matemáticas complexas.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *Revista VIDYA*, v. 42, n. 2, 2022.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P. Ciclo de modelagem matemática interpretado à luz de estratégias heurísticas dos alunos. *REnCiMa*, v. 12, n. 2, p. 1–27, 2021.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2002.
- BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. *Educational Studies in Mathematics*, v. 22, p. 37–68, 1991.
- BURROWES, M; FARINA, C. Sobre o Pêndulo Isócrono de Christiaan Huygens. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.27, n.2, p. 175-179, 2005.
- COLUCI, V. R.; FONSECA, A. F. da. Determinação da dependência de Δ com x_1 e x_2 para o caso de dois pêndulos acoplados por uma barra rígida. UNICAMP, 2021.
- DUTRA, C. M.; SOUZA, M. O. O uso da problematização e do pêndulo simples para o estudo da gravidade. *Revista Thema*, v. 16, n. 1, p. 10-23, 2019. DOI: <http://10.15536/thema.16.2019.10-23.1157>.
- FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. São Paulo: Pearson, 2006.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica*. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- JEWETT Jr., John W.; SERWAY, Raymond A. *Física para Cientistas e Engenheiros, Volume 2: oscilações, ondas e termodinâmica*. Tradução de EZ2 Translate. 8ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- LAGE, E. Pêndulo simples. *Revista de Ciências Elementar*, v. 6, n. 3, p. 1-3, 2018. DOI: doi.org/10.24927/rce2018.054.

LOPES, A. P. C. Aprendizagem significativa crítica em atividades de modelagem matemática: possibilidades e desafios. *Revista Práxis Educacional*, v. 19, n. 50, p. 1-19, 2023. DOI: <https://doi.org/10.22481/praxisedu.v19i50.12287>.

LOPES, A.; PACHECO, J. V. P. Panorama das pesquisas brasileiras em modelagem matemática no ensino superior pela perspectiva da educação matemática crítica. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 16, n. 2, p. 1-32, 2023. DOI: <https://doi.org/10.5007/1982-5153.2023.e91386>

MOREIRA, J. P.; SILVA, E. N.; DALBETO, L. O.; LIÃO, M. M. R.; CARVALHO, A. D. Estudo e modelagem de um pêndulo simples através de equações diferenciais e análise de vídeo assistida por computador. *Revista Acadêmica – Ensino de Ciências e Tecnologias*, v. 5, n. 5, p. 37-58, 2019.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas*. v. 2. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

OLIVEIRA, E. A. F. de; JANUÁRIO, T. L. da S.; ARAÚJO FILHO, J. G. de. Análise do ensino de modelagem matemática na disciplina de pesquisa operacional em cursos de engenharia de produção. *Exacta – Engenharia de Produção*, v. 22, n. 1, p. 304-320, jan./mar. 2024. DOI: <https://doi.org/10.5585/exactaep.2022.21664>.

PRIEST, J.; POTH, J. Teaching physics with coupled pendulums. *The Physics Teacher*, 1982.

SANTANA, O. J. S.; SILVA, R. S. Estudo numérico da frequência de oscilação de dois pêndulos acoplados por uma mola. *Revista Thema*, v. 14, n. 4, p. 128-135, 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.15536/thema.14.2017.128-135.737>.

SOARES, M. R.; SANTOS, G. d. A modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem: contribuições das atividades sobre energia elétrica. *Revista Práxis*, v. 8, n. 16, p. 39–57, 2016.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Física 2, Sears e Zemansky: termodinâmica e ondas*. Colaborador: A. Lewis Ford. Tradução: Daniel Vieira. Revisão técnica: Adir Moysés Luiz. 14. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

Anexo

O experimento que envolve o movimento dos pêndulos acoplados, realizado para o desenvolvimento deste artigo, pode ser visualizado através da filmagem disponível no QR Code a seguir:

